سوال ۱

$$D=\{(x,y):\ x\leq y^2\leq 3x\ ,\ y\leq x^3\leq 2y\}$$

$$=\{(x,y):\ 1\leq \frac{y^2}{x}\leq 3,\ 1\leq \frac{x^3}{y}\leq 2\}$$ (با توجه به اینکه با شرایط بالا x و y مثبت اند)

قرار می‌دهیم $u=y^2/x$ ، $v=\frac{x^3}{y}$ در این صورت : $1\leq u\leq 3,\ 1\leq v\leq 2$ ، و

۵ نمره

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}-y^2/x^2 & \frac{2y}{x}\\ \frac{3x^2}{y} & -\frac{x^3}{y^2}\end{bmatrix}\Rightarrow\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=5x$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{5x}$$

۸ نمره

۲ نمره

$$\Rightarrow\quad \boxed{dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv}=\frac{1}{5x}dudv$$

$$\Rightarrow\quad \iint_D \frac{x^4}{y}dxdy=\frac{1}{5}\iint_D \underbrace{\left(\frac{x^3}{y}\right)}_{v}\underbrace{5x\,dxdy}_{dudv}$$

۵ نمره

$$=5\iint_{\substack{1\leq u\leq 3\\ 1\leq v\leq 2}} v\,dudv=\frac{1}{5}\times 2\times\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=\frac{3}{5}$$

سؤال ۲:

راه‌حل اول: توجه کنید که روی کره واحد داریم $x^2+y^2+z^2=1$ بنابراین روی M:

$$x^2+2y^2 = x^2+y^2+z^2+y^2-z^2 = 1+y^2-z^2$$ ۱۰ نمره

$$\Rightarrow \int_M (x^2+2y^2)\,dS = \int_M (1+y^2-z^2)\,dS = \text{مساحت کره واحد} = 4\pi$$ ۲ نمره ۸ نمره

در بالا از این نکته استفاده کردیم که با توجه به تقارن $\int_M z^2\,dS = \int_M y^2\,dS$.

راه‌حل دوم: پرمایش کره را در نظر می‌گیریم:

۶ نمره

$$\varphi(u,v) = (\cos u \sin v,\ \sin u \sin v,\ \cos v) \quad : \quad 0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le \pi$$

$$\varphi_u = (-\sin u \sin v,\ \cos u \sin v,\ 0)$$

$$\varphi_v = (\cos u \cos v,\ \sin u \cos v,\ -\sin v)$$ ۴ نمره

$$\varphi_u\times\varphi_v = (-\cos u \sin^2 v,\ -\sin u \sin^2 v,\ -\cos v \sin v)$$

$$\|\varphi_u\times\varphi_v\|^2 = \sin^2 v \quad \Rightarrow \quad \|\varphi_u\times\varphi_v\| = \sin v \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad dS = \sin v\, du\, dv$$ ۶ نمره

$$\int_M (x^2+2y^2)\,dS = \int_{\substack{0\le u\le 2\pi \\ 0\le v\le \pi}} \left(\cos^2 u \sin^2 v + 2\sin^2 u \sin^2 v\right) \sin v\, du\, dv$$

۴ نمره

$$= \left(\int_{0\le u\le 2\pi} (1+\sin^2 u)\,du\right)\left(\int_{0\le v\le \pi} \sin^3 v\, dv\right) = (3\pi)\left(\tfrac{4}{3}\right) = 4\pi$$

سؤال ۳

$$D=\{(x,y,z) : \quad g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=9 \ \text{و} \ h(x,y,z)=2(xy+yz+zx)=16 \ \text{و} \ x,y,z\geq 0 \}$$

$$f(x,y,z)=xyz$$

۱ نمره

نکتهٔ ۱: مجموعهٔ D بسته و کراندار است (تقاطع کرهٔ واحد با صفحهٔ $x+y+z=5$ است) و تابع f یک تابع پیوسته است بنابراین نقطه‌ای از D وجود دارد که f در آن بیشینه می‌شود.

۱ نمره

نکتهٔ ۲: این نقطهٔ بیشینه تابع f نمی‌تواند در هیچ یک از شرایط $x=0$ یا $y=0$ یا $z=0$ صدق کند زیرا f در چنین نقاطی صفر است و روی دیگر نقاط D مثبت است.

(در واقع ناحیه بالا یک خم بدون مرز است و هیچ یک از نامساوی‌های $x,y,z\geq 0$ نمی‌توانند به تساوی تبدیل شوند.

زیرا اگر مثلاً $x=0$ باشد باید داشته باشیم $y^2+z^2=9$ و $2yz=16$ آنگاه

$(y-z)^2=y^2+z^2-2yz=-7$ که ممکن نیست)

۱ نمره

نکتهٔ ۳: در همهٔ نقاط D، ∇g و ∇h مستقل خطی‌اند. زیرا در غیر این صورت داریم:

$$\nabla h = a\nabla g \implies y+z=ax,\quad z+x=ay,\quad x+y=az$$

$$\implies 2(x+y+z)=a(x+y+z) \implies \begin{cases} a=2 \\ \text{یا} \\ x+y+z=0 \quad \times \end{cases}$$

$$a=2 \implies \begin{cases} x+y=2z \\ x+z=2y \\ y+z=2x \end{cases} \implies \begin{matrix} y-z=2(z-y) \implies y=z \\ x-y=2(y-x) \implies x=y \end{matrix} \Bigg\} \implies x=y=z \quad \times$$

طبق قضیه ضرایب لاگرانژ اگر $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطه بیشینه تابع f روی D باشد آنگاه

$$\begin{cases}\nabla f(P_0)=\lambda\nabla g(P_0)+\mu\nabla h(P_0)\\ g(P_0)=9\\ h(P_0)=16\end{cases}$$

۱۰ نمره

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} yz=2\lambda x+2\mu(y+z)\\ zx=2\lambda y+2\mu(z+x)\\ xy=2\lambda z+2\mu(x+y)\\ x^2+y^2+z^2=9\\ xy+yz+zx=8\end{cases}}$$

۲ نمره

$$\Rightarrow z(y-x)=2(\mu-\lambda)(y-x)$$

$$\Rightarrow x(z-y)=2(\mu-\lambda)(z-y)$$

طبق این دو رابطه اگر y مخالف x و z باشد آنگاه باید $x=z=2(\mu-\lambda)$.

۳ نمره

بنابراین حتماً دوتا از متغیرهای x و y و z باید مساوی باشند. بنابه تقارن می‌توانیم فرض کنیم $x=y$

$$\Rightarrow \begin{matrix}2x^2+z^2=9\\ x^2+2xz=8\end{matrix} \Rightarrow (x-z)^2=1 \Rightarrow \begin{cases}z=x+1\\ z=x-1\end{cases}$$ یا

$$z=x+1 \Rightarrow 2x^2+(x+1)^2=9 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$ یا $$x=-2 \xRightarrow{x\geq 0} x=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x=y=\frac{4}{3},\ z=\frac{7}{3} \Rightarrow f(x,y,z)=xyz=\frac{112}{27}$$

$$z=x-1 \Rightarrow 2x^2+(x-1)^2=9 \Rightarrow x=\frac{-4}{3}$$ یا $$x=2 \xRightarrow{x\geq 0} x=2$$

۲ نمره

$$\Rightarrow x=y=2,\ z=1 \Rightarrow f(x,y,z)=xyz=4$$

از بین این دو مقدار اولی بیشتر است و بنابراین اضلاع مکعب مستطیل مورد نظر برابر $\frac{4}{3}$ و $\frac{4}{3}$ و $\frac{7}{3}$ است.

سؤال ۴

$$f(a,b,c) = p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2$$ ثابت

۲ نمره

$$(a,b,c) = (5,6,7) \Rightarrow p = 9 \Rightarrow p-a = 4,\ p-b = 3,\ p-c = 2$$

$$f_c(a,b,c) = \frac{1}{4}\Big[(p-a)(p-b)(p-c) + p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) - p(p-a)(p-b)\Big]$$

۲ نمره

$$= \frac{1}{4}\Big[4\times 3\times 2 + 9\times 3\times 2 + 9\times 4\times 2 - 9\times 4\times 3\Big]$$

$$\boxed{= 45 \neq 0}$$

۱ نمره

طبق قضیه تابع ضمنی در نزدیکی نقطه $(5,6,7)$ مؤلفه سوم نقاط روی سطح تراز تابع f تابعی مشتق‌پذیر از دو مؤلفه دیگر است.

۵ نمره

$$f_a(a,b,c) = \frac{1}{4}\Big[(p-a)(p-b)(p-c) - p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b)\Big] = \boxed{75}$$

۱ نمره

$$f_b(a,b,c) = \frac{1}{4}\Big[(p-a)(p-b)(p-c) + p(p-b)(p-c) - p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b)\Big] = \boxed{33}$$

۱ نمره

$$\left.\frac{\partial c}{\partial a}\right|_{(5,6)} = -\frac{f_a}{f_c} = -\frac{5}{3} \quad , \quad \left.\frac{\partial c}{\partial b}\right|_{(5,6)} = -\frac{f_b}{f_c} = -\frac{11}{15}$$

۲ نمره   ۲ نمره

$$c(4.99\,,\,6.02) \cong c(5,6) + \frac{\partial c}{\partial a}\cdot(4.99-5) + \frac{\partial c}{\partial b}\cdot(6.02-6)$$

$$= 7 + \frac{1}{60} - \frac{11}{1500} = 7 + \frac{28}{3000}$$

۴ نمره

سوال ۵

فرض کنید $E = v$ میدانی ثابت باشد. آنگاه:

$$v \cdot \int_S \hat{N}\, dS = \int_S v \cdot \hat{N}\, dS = \int_S E \cdot \hat{N}\, dS$$ ۵ نمره

(قضیه دیورژانس) $$\int_D \mathrm{div}(E)\, dv = 0$$ ۱۲ نمره

رابطه آخر به این دلیل است که E میدانی ثابت است و $\mathrm{div}(E)$ همه جا برابر صفر است

این نشان می‌دهد ضرب داخلی $\int_S \hat{N}\, dS$ بر هر برداری صفر است. بنابراین خود آن باید برابر بردار صفر باشد. ۳ نمره

سوال ۶ :

فرض کنید D ناحیه درون خم C در صفحه $x+y+z=1$ باشد. اگر D را با بردار نرمال $N=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (در همه نقاط) جهت دار کنیم آنگاه مرز آن با جهتی که در مسئله بیان شده جهت دار خواهد شد و طبق قضیه استوکس داریم:

۴ نمره

$$\boxed{\int_D \operatorname{curl} F\cdot N\, dS = \int_C F\cdot dr}$$

۱۰ نمره

$$\operatorname{curl} F = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy^2 & 3z-xy^2 & 4y-x^2y \end{bmatrix}$$

۱ نمره

$$= \left(1-x^2,\ 2xy,\ -y^2-2xy\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{curl} F\cdot N = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-x^2-y^2\right)}$$

۱ نمره

این تابع روی صفحه مورد نظر برای نقاطی که x و y آنها در رابطه $x^2+y^2\leq 1$ صدق می‌کند مثبت و در بقیه نقاط منفی است. پس اگر ناحیه D دقیقاً برابر این مجموعه باشد آنگاه مقدار انتگرال $\int_D \operatorname{curl} F\cdot N\, dS$ بیشترین مقدار خواهد بود. یعنی

$$D=\left\{(x,y,z):\ \begin{matrix} x+y+z=1 \\ x^2+y^2\leq 1\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow C=\partial D:\quad \gamma(\theta)=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1-\cos\theta-\sin\theta)\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

۴ نمره